山东省实验中学2026届高三第二次诊断性考试

数学试题答案 2025.11

一、单项选择题

BACDB　ACB

二、多项选择题

BCD　ACD　ACD

三、填空题

-20　$(-\infty,-2)\cup(\frac{2}{3},2)$　$2\sqrt{2}$

四、解答题

15.（1）根据题中所给等高堆积条形图，得列联表如下：

单位：次	A 材料	B 材料	合计
试验成功	90	60	150
试验失败	10	40	50
合计	100	100	200

--2 分

零假设为 H_0：试验结果与材料无关．--3 分

计算可得 $\chi^2=\dfrac{200\times(90\times40-60\times10)^2}{150\times50\times100\times100}=24>10.828=x_{0.001}$，-------------------------5 分

依据 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为试验结果与材料有关．-----------6 分

（2）X 的可能取值为 0，2，3，5．---7 分

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，$P(X=5)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，-----------------------------------11 分

则 X 的分布列为

X	0	1	3	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{6}=\frac{13}{6}$．-----------------------------------13 分

16.（1）$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin^2\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)-1=\sqrt{3}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$．--3 分

因为函数 $f(x)$ 的相邻两个对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，所以函数 $f(x)$ 的周期 $T=\pi$.

由 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$ ，解得 $\omega=1$ ，-- 5 分

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

令 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ， $k\in\mathbf{Z}$ ，解得： $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$ ， $k\in\mathbf{Z}$

所以 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$ ， $k\in\mathbf{Z}$ --- 7 分

（2）将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象．再把每个点的横坐标扩大为原来的 2 倍（纵坐标不变），得到 $g(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象， ------------------------- 9 分

因为 $g\left(x_0\right)=2\sin\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{6}{5}$ ，所以 $\sin\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$. ---10 分

$\because x_0\in(-\pi,0)$ ， $\therefore x_0+\frac{\pi}{3}\in(-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ ，又 $\sin\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}>0$ ，

$\therefore x_0+\frac{\pi}{3}\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ ，则 $\cos\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$. --13 分

$f\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(2x_0+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(2\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)\right)=4\sin\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{48}{25}$. ----------------15 分

17．（1） $f'\left(x\right)=3x^2+2ax$ ， --- 1 分
由题 $f'\left(2\right)=12+4a=0$ ，所以 $a=-3$ ， --- 3 分
经检验 $a=-3$ 合题意， --- 4 分
又因为 $f\left(3\right)=27-27+b=1$ ，所以 $b=1$ ； -- 6 分
（2）设 $y=g\left(x\right)$ 上任意一点 $P\left(x,y\right)$ ， P 关于 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 的对称点 $Q(1-x,-1-y)$ 在 $y=f\left(x\right)$ ，
所以 $-1-y=\left(1-x\right)^3-3\left(1-x\right)^2+1$ ，所以 $y=x^3-3x$ ，即 $g\left(x\right)=x^3-3x$ ， -------------------------- 9 分
因为存在 $x\in[-2,0)$ 使得 $g\left(x\right)\geqslant 2-mx$ 成立，

所以 $x^3-3x\geqslant 2-mx$ 成立，即 $m\leqslant -x^2+\frac{2}{x}+3$ 成立， ---11 分

令 $h\left(x\right)=-x^2+\frac{2}{x}+3$ ， $x\in[-2,0)$ ，则 $h'\left(x\right)=\frac{-2\left(x^3+1\right)}{x^2}$ ，令 $h'\left(x\right)=0$ ，得 $x=-1$ ，
所以当 $x\in\left[-2,-1\right]$ 时， $h'\left(x\right)>0$ ， $h\left(x\right)$ 单调递增，
所以当 $x\in(-1,0)$ 时， $h'\left(x\right)<0$ ， $h\left(x\right)$ 单调递减， --13 分
所以 $h\left(x\right)_{\max}=h\left(-1\right)=0$ ，所以 $m\leqslant 0$ ，
所以 m 的取值范围是 $\left(-\infty,0\right]$. --15 分

18．（1）因为$\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin(\pi-B)$，$A+B+C=\pi$，

所以$\sin\dfrac{\pi-B}{2}=\sin(\pi-B)$，即$\cos\dfrac{B}{2}=\sin(\pi-B)$，所以$\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$，---------------------------------2 分

因为$0<B<\pi$，所以$\dfrac{B}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$，--3 分

所以$\angle AOC=\dfrac{2\pi}{3}$；--4 分

（2）因为$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin A}$，

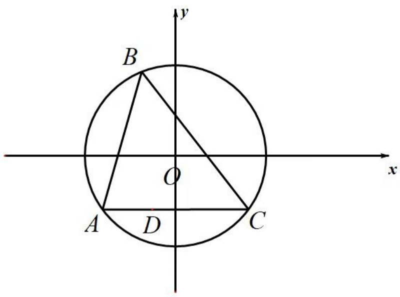
所以$AB=\dfrac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{3}+A)}{\sin A}=\dfrac{\frac{3}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A}{\sin A}=\dfrac{3}{2\tan A}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，------------------------------7 分

因为$\triangle ABC$是锐角三角形，所以$\begin{cases}A+\dfrac{\pi}{3}>\dfrac{\pi}{2}\\ 0<A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，所以$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，-------------------------------------8 分

所以$\tan A>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以$\dfrac{3}{2\tan A}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\in(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3})$，

所以AB的取值范围是$(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3})$；---10 分

（3）以O为原点，AC的中垂线为y轴建系，



则$A(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2})$，$C(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2})$，$D(-\dfrac{\sqrt{3}}{6},-\dfrac{1}{2})$，

因为$\dfrac{AC}{\sin B}=2=2R$，所以$R=1$，所以$OB=1$，-----------12 分

设$B(\cos\theta,\sin\theta)$，则

$\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OD}=(\cos\theta,\sin\theta)+(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2})=(\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sin\theta-\dfrac{1}{2})$，

所以$\left|\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OD}\right|^2=(\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+(\sin\theta-\dfrac{1}{2})^2=4-\sqrt{3}\cos\theta-3\sin\theta=4-2\sqrt{3}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})$，------15 分

因为$\triangle ABC$是锐角三角形，所以$\theta\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$，所以$\theta+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{3},\pi)$，

所以$\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})\in(0,1]$，所以$\left|\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OD}\right|^2\in[4-2\sqrt{3},4)$，所以$\left|\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OD}\right|\in[\sqrt{3}-1,2)$．---------17 分

19．

（1）当$a=1$时，$f(x)=\ln x-2x$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2$，--1 分

可得$f(1)=-2$，$f'(1)=-1$，--2 分

所以曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y-(-2)=(-1)\cdot(x-1)$，即$x+y+1=0$．----------4 分

（2）$f'(x)=\dfrac{a}{x}-2=\dfrac{-2x+a}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，令$f'(x)=0$，得$x=\dfrac{a}{2}$，

①当$\dfrac{a}{2}\leqslant 2$，即$a\leqslant 4$时，$f'(x)\leqslant 0$在$x\in[2,4]$恒成立，所以$f(x)$在$[2,4]$上单调递减，所以

$f(x)_{\max}=f(2)=a\ln 2-4=0$，$a=\dfrac{4}{\ln 2}>4$，不合条件，舍；-- 5 分

②当 $2<\dfrac{a}{2}<4$，即 $4<a<8$ 时，当 $x\in(2,\dfrac{a}{2})$，$f'(x)>0$，当 $x\in(\dfrac{a}{2},4)$，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(2,\dfrac{a}{2})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{a}{2},4)$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(\dfrac{a}{2})=a\ln\dfrac{a}{2}-a=0$，解得 $a=2\mathrm{e}$，符合条件；-- 7 分

③当 $\dfrac{a}{2}\geqslant 4$，即 $a\geqslant 8$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 在 $x\in[2,4]$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递增，所以

$f(x)_{\max}=f(4)=a\ln 4-8=0$，$a=\dfrac{4}{\ln 2}<8$，不合条件，舍．-- 8 分

综上，$a=2\mathrm{e}$．--- 9 分

（3）由 $\dfrac{x^a}{\mathrm{e}^{2x}}-2f(x)\geqslant\cos[f(x)]$，可得 $\mathrm{e}^{a\ln x-2x}-2f(x)-\cos[f(x)]\geqslant 0$，

即 $\mathrm{e}^{f(x)}-2f\left(x\right)-\cos\left[f\left(x\right)\right]\geq 0$，--10 分

设 $g\left(t\right)=\mathrm{e}^t-2t-\cos t$，其中 $t=f\left(x\right)$，则 $g'\left(t\right)=\mathrm{e}^t-2+\sin t$，

设 $h\left(t\right)=\mathrm{e}^t+\sin t-2$，则 $h'\left(t\right)=\mathrm{e}^t+\cos t$，

当 $t\leq 0$ 时，$\mathrm{e}^t\leq 1$，$\sin t\leq 1$，且等号不同时成立，则 $g'\left(t\right)<0$ 恒成立，

当 $t>0$ 时，$\mathrm{e}^t>1$，$\cos t\geq -1$，则 $h'\left(t\right)>0$ 恒成立，则 $g'\left(t\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

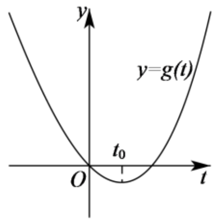
又因为 $g'\left(0\right)=-1$，$g'\left(1\right)=\mathrm{e}-2+\sin 1>0$，

所以，存在 $t_0\in\left(0,1\right)$ 使得 $g'\left(t_0\right)=0$，

当 $0<t<t_0$ 时，$g'\left(t\right)<0$；当 $t>t_0$ 时，$g'\left(t\right)>0$．

所以，函数 $g\left(t\right)$ 在 $\left(-\infty,t_0\right)$ 上单调递减，在 $\left(t_0,+\infty\right)$ 上单调递增，且 $g\left(0\right)=0$，------------------13 分

作出函数 $g\left(t\right)$ 的图象如下图所示：



当 $a>0$ 时，由（2）得 $f\left(x\right)_{\max}=f\left(\dfrac{a}{2}\right)=a\ln\dfrac{a}{2}-a$，且当 $x\to 0^+$ 时，$f\left(x\right)\to-\infty$，

此时函数 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left(-\infty,a\ln\dfrac{a}{2}-a\right]$，即 $t\in\left(-\infty,a\ln\dfrac{a}{2}-a\right]$.

（i）当 $a\ln\dfrac{a}{2}-a\leq 0$ 时，即当 $0<a\leq 2\mathrm{e}$ 时，$g\left(t\right)\geq 0$ 恒成立，合乎题意；------------------------15 分

（ii）当 $a\ln\dfrac{a}{2}-a>0$ 时，即当 $a>2\mathrm{e}$ 时，取 $t_1=\min\left\{a\ln\dfrac{a}{2}-a,t_0\right\}$，

结合图象可知 $g\left(t_1\right)<0$，不合乎题意. ---16 分

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\left(0,2\mathrm{e}\right]$.---17 分