2025年9月济南市高三模拟考试

数学试题参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	A	B	B	C	C

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11
答案	ABD	BC	AC

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．14　　13．$\frac{2}{7}$　　14．$-\frac{5}{6}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．【解析】

（1）当$n\geqslant 2$时，$a_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{T_n}{T_n-2}$，所以$T_n-T_{n-1}=2$，

当$n=1$时，$a_1=T_1=\frac{T_1}{T_1-2}$，所以$a_1=T_1=3$．

所以，$\{T_n\}$是以3为首项，以2为公差的等差数列．

（2）由（1）知，$T_n=3+2(n-1)=2n+1$，

所以$C_n=\frac{1}{T_n\cdot T_{n+1}}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})$．

$$S_n=C_1+C_2+C_3+\cdots+C_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})=\frac{1}{6}-\frac{1}{4n+6}.$$

16.【解析】

（1）设A=“标有数字 2 和 4 的小球不相邻”．

四个小球随机排列总数$n(\Omega)=A_4^4=24$，

“标有数字 2 和 4 的小球不相邻”$n(A)=2\times A_3^3=12$，

$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$．

（2）由题意，X=0，1，2．

$P(X=0)=\dfrac{2\times2\times2}{A_4^4}=\dfrac{1}{3}$；$P(X=1)=\dfrac{2(2A_3^3-8)}{A_4^4}=\dfrac{1}{3}$；$P(X=2)=\dfrac{2\times2\times A_2^2}{A_4^4}=\dfrac{1}{3}$；

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$E(X)=0\times\dfrac{1}{3}+1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{3}=1$.

17.【解析】

（1）连接BD交AC于O，因为四边形$ABCD$为菱形，所以$AC\perp BD$.

又因为$PA=PC$，所以$PO\perp AC$，

因为$PO\cap BD=O$，所以$AC\perp$面PBD，

又因为$PD\subset$面PBD，所以$AC\perp PD$.

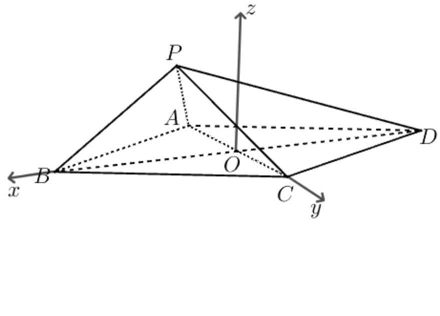
（2）以O为原点，建系如图.所以$A(0,-1,0),B(\sqrt{3},0,0),C(0,1,0),D(-\sqrt{3},0,0)$，由（1）得，设$P(x,0,z)$，因为$PA=\sqrt{2}$，所以$x^2+1+z^2=2$，所以$x^2+z^2=1$，

因为$\overrightarrow{BP}=(x-\sqrt{3},0,z),\overrightarrow{DP}=(x+\sqrt{3},0,z)$，所以$\left|\cos\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{DP}\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{BP}||\overrightarrow{DP}|}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{4-3x^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

因为$PB<PD$，所以$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则$z=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以$P(\dfrac{\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{\sqrt{6}}{3})$.

因为$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0),\overrightarrow{CP}=(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-1,\dfrac{\sqrt{6}}{3})$，设面$PBC$的法向量为$\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

所以$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_1-y_1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}z_1=0\\-\sqrt{3}x_1+y_1=0\end{cases}$，令$x_1=1$，所以$\vec{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{2})$.



因为$\overrightarrow{DC}=(\sqrt{3},1,0)$，则$\left|\cos\langle\overrightarrow{DC},\vec{n}\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{DC}||\vec{n}|}\right|=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以CD与平面PBC所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

18.【解析】

（1）由题意$f'(x)=\mathrm{e}^x-x-a$，令$g(x)=f'(x)=\mathrm{e}^x-x-a$，$g'(x)=\mathrm{e}^x-1$，令$g'(x)=0$，解得$x=0$.

$g'(x)$，$g(x)$ 的变化情况如下表所示.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	单调递减	$1-a$	单调递增

所以，

①当 $a\le 1$ 时，$1-a\ge 0$，$f'(x)\ge 0$，此时 $f(x)$ 无极值点；

②当 $a>1$ 时，$1-a<0$，$x\to-\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$，$f'(0)=1-a<0$，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上存在唯一的零点 x_1，

$x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$，$f'(0)=1-a<0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一的零点 x_2.

（或者取点：$\exists -a<0$，使得 $f'(-a)=\mathrm{e}^{-a}-(-a)-a=\mathrm{e}^{-a}>0$，$f'(0)=1-a<0$，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上存在唯一的零点 x_1；$\exists x_0=1+\sqrt{1+2a}>0$，使得 $f'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-x_0-a>\frac{1}{2}{x_0}^2-x_0-a=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+2a})^2-(1+\sqrt{1+2a})-a=0$，$f'(0)=1-a<0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一的零点 x_2.）

当 x 变化时，$f(x)$，$f'(x)$ 的变化情况如下表所示.

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增		单调递减		单调递增

所以 $f(x)$ 有两个极值点.

综上所述，当 $a\le 1$ 时，$f(x)$ 无极值点；当 $a>1$ 时 $f(x)$ 有两个极值点.

（2）（i）证明：令 $G(x)=g(x)-g(-x)$，$x>0$，

$G'(x)=g'(x)+g'(-x)=\mathrm{e}^x-1+\mathrm{e}^{-x}-1=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2>2\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x}}-2=0$，

所以 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $G(x)=g(x)-g(-x)>g(0)-g(0)=0$，即当 $x>0$ 时，有 $g(x)>g(-x)$.

令 $x=x_2$，即得 $g(x_2)>g(-x_2)$，又因为 $g(x_1)=g(x_2)$，所以 $g(x_1)>g(-x_2)$，又因为 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，且有 $x_1<0$，$-x_2<0$，所以 $x_1<-x_2$，即得 $x_1+x_2<0$.

由（1）知 $x_1<0<x_2$，

要证：$x_1+x_2<0$，

只需证：$x_1<-x_2<0$，因为 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

即证：$g(x_1)>g(-x_2)$，因为 $g(x_1)=g(x_2)$，

即证：$g(x_2)>g(-x_2)$，

令 $G(x)=g(x)-g(-x)$，$x>0$，

$G'(x)=g'(x)+g'(-x)=\mathrm{e}^x-1+\mathrm{e}^{-x}-1=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2>2\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x}}-2=0$，

所以 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $G(x)=g(x)-g(-x)>g(0)-g(0)=0$，

即当 $x>0$ 时，有 $g(x)>g(-x)$.

令 $x=x_2$，即得 $g(x_2)>g(-x_2)$，得证.

（ii）证明：令 $F(x)=f(x)+f(-x)$，$x>0$，

$F'(x)=f'(x)-f'(-x)=(\mathrm{e}^x-x-a)-(\mathrm{e}^{-x}+x-a)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$，

令 $\varphi(x)=F'(x)$，则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2>0$，所以 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $F'(x)>F'(0)=0$，从而 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $F(x)>F(0)=2$.

令 $x=x_2$，即得 $f(x_2)+f(-x_2)>2$.

由 $x_1+x_2<0$ 可得，$x_1<-x_2<0$，再由 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上单调递减可得 $f(x_1)>f(-x_2)$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)>f(-x_2)+f(x_2)>2$.

19.【解析】

（1）由题意得抛物线的准线为 $x=-1$，故 $p=2$.

从而抛物线的标准方程为 $y^2=4x$.

（2）设 $A_1(x_1,y_1)$，由于 A_1 在第一象限，估斜率存在。设直线 l_1 的方程为 $y-y_1=k_1(x-x_1)$。

联立 l_1 与抛物线方程

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = k_1(x - x_1) + y_1 \end{cases}$$

得 $(k_1(x-x_1)+y_1)^2 - 4x = 0$．令 $\Delta = 0$ 得 $k_1 = \dfrac{2}{y_1}$

即直线 l_1 的方程为 $y_1 y = 2(x + x_1)$，

令 $x = 0$ 得 $M(0, \dfrac{2x_1}{y_1})$

由题意知 $F(1,0)$，故 $k_{FM} = -\dfrac{2x_1}{y_1}$．

$k_1 \cdot k_{FM} = -\dfrac{4x_1}{y_1^2}$，

考虑到 $A_1(x_1, y_1)$ 在抛物线上，故有 $y_1^2 = 4x_1$，代入得 $k_1 \cdot k_{FM} = -\dfrac{4x_1}{y_1^2} = -1$．

故 $FM \perp l_1$．

（3）设 $A_2(x_1, -y_1)$，$A_3(x_3, y_3)$，同（2）有 $l_2: -y_1 y = 2(x + x_1)$，$l_3: y_3 y = 2(x + x_3)$．

联立 l_3 与 l_1，

$$\begin{cases} y_1 y = 2(x + x_1) \\ y_3 y = 2(x + x_3) \end{cases}$$

解得，$x_P = \dfrac{x_1 y_3 - x_3 y_1}{y_1 - y_3} = \dfrac{y_1^2 y_3 - y_3^2 y_1}{4(y_1 - y_3)} = \dfrac{y_1 y_3}{4}$，

同理 $x_Q = -\dfrac{y_1 y_3}{4}$．

故 $x_P + x_Q = 0$。设直线 l_3 与 y 轴交于 N，则 P，Q 关于点 N 对称，即 $NP = NQ$．

类似于（1），可得 FN 垂直于 l_3．故 $FP = FQ$．

延长 QF 交 y 轴于 B，则 $\angle PFB = 2\angle PQF$，

故 $\angle PFB = \angle PFM$ 。从而 B 与 M 重合. 即 M, F, Q 共线.

进而 $k_1 = k_2$，注意到 $k_1 \neq 0$，故 $\dfrac{k_1}{k_2} = 1$．