高三年级 12 月检测训练

数学试题参考答案及多维细目表

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	C	D	B	A	A
题号	7	8	9	10	11	
答案	D	B	AB	ACD	ACD	

1.【答案】B

【解析】∵$A=\{x|x\leqslant -1$,或$x\geqslant 3\}$,$B=\{x|x\geqslant \sqrt{e}\}$,∴$A\cup B=\{x|x\leqslant -1$,或$x\geqslant \sqrt{e}\}$.

2.【答案】C

【解析】方法一:∵$(2+i)z=3i-1$,∴$z=\frac{3i-1}{2+i}=\frac{(3i-1)(2-i)}{5}=\frac{1}{5}+\frac{7i}{5}$,∴$|z|=\sqrt{2}$,∴$z\cdot\overline{z}=|z|^2=2$.

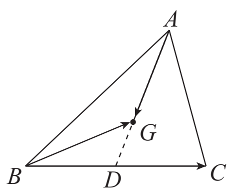
方法二:∵$(2+i)z=-1+3i$,∴$\sqrt{5}|z|=\sqrt{10}$,∴$|z|=\sqrt{2}$,∴$z\cdot\overline{z}=|z|^2=2$.

3.【答案】D

【解析】∵$\sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$,∴$ab\geqslant 2$,∴$\frac{1}{\log_a 2}+\frac{1}{\log_b 2}=\log_2 ab\geqslant\log_2 2=1$,∴最小值为1,此时$a=b=\sqrt{2}$.

4.【答案】B

【解析】如图,延长AG交BC于点D,则$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$,∵$\overrightarrow{BG}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\cdot\overrightarrow{AG}$,且$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{AG}$不共线,∴$\lambda=\frac{1}{2}$,$\mu=-\frac{1}{2}$,∴$\lambda-\mu=1$.



5.【答案】A

【解析】方法一:由$a_n=\frac{S_n}{n}+2(n-1)$得$na_n=S_n+2n(n-1)$,∴当$n\geqslant 2$时,$n(S_n-S_{n-1})=S_n+2n(n-1)$.

∴$(n-1)S_n-nS_{n-1}=2n(n-1)$,∴$\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=2(n\geqslant 2)$,∴$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是首项为$-5$,公差为2的等差数列.

∴$\frac{S_n}{n}=-5+2(n-1)=2n-7$,∴$S_n=n(2n-7)=2n^2-7n$,∴$S_n$的最小值为$S_2=-6$,∴$\lambda\leqslant -6$.

方法二:当$n\geqslant 2$时,$na_n=S_n+2n(n-1)$①,$(n-1)a_{n-1}=S_{n-1}+2(n-1)(n-2)$②.

①$-$②得$(n-1)a_n-(n-1)a_{n-1}=4(n-1)$,$n\geqslant 2$,∴$a_n-a_{n-1}=4$,

∴数列$\{a_n\}$是首项为-5,公差为4的等差数列.

∴$a_n=-5+4(n-1)=4n-9$,令$a_n>0$得$n\geqslant 3$,∴S_n的最小值为$S_2=-6$,∴$\lambda\leqslant -6$.

6.【答案】A

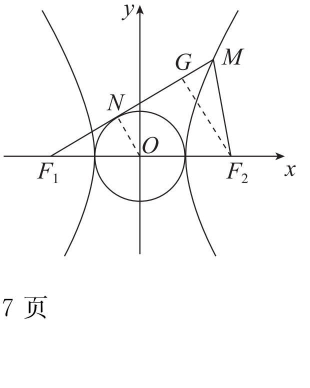
【解析】由题得筒车半径为2 m,转动一圈需要40 s,且轴心O距水面高度为$\sqrt{3}$ m,

∴$A=\frac{(2+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-2)}{2}=2$,$\omega=\frac{3\pi}{60}=\frac{\pi}{20}$,$K=\frac{(2+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-2)}{2}=\sqrt{3}$(m).

又以盛水桶P刚浮出水面时开始计时,∴$d(0)=0$,∴$\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.又$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,∴$\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

7.【答案】D

【解析】如图,设点M在第一象限,过点F_2作$F_2G\perp MF_1$于点G,设N为圆O的切点,连接ON,∴$F_1N=NG=m$,$F_2G=2ON=2$.



在 $Rt\triangle MGF_2$ 中，$MG=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$MF_2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，由双曲线定义得 $|MF_1|-|MF_2|=2$，$\therefore 2m+\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}=2$，$\therefore m=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8.【答案】B

【解析】$\because g(x)=f(x)+f(-x)$，$\therefore g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$. 又 $g(x)$ 定义域为 $\{x|x\neq 0\}$ 关于原点对称，$\therefore g(x)$ 为偶函数. 要使 $y=g(x)$ 恰有 4 个零点，则需使 $y=g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恰有 2 个零点.

当 $x>0$ 时，$g(x)=e^x(2x-1)+k(-x+1)=e^x(2x-1)-k(x-1)$.

方法一：令 $e^x(2x-1)=k(x-1)$，显然 $x=1$ 不是方程的根，$\therefore k=\frac{e^x(2x-1)}{x-1}$，记 $h(x)=\frac{e^x(2x-1)}{x-1}$，问题转化为 $h(x)=k$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有 2 个解.

又 $h'(x)=\frac{e^x(2x^2-3x)}{(x-1)^2}$，

$\therefore x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；$x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；$x\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

且 $h(0)=1$. 当 x 从 1 的左侧无限趋近于 1 时，$h(x)$ 趋近于 $-\infty$；当 x 从 1 的右侧无限趋近于 1 时，$h(x)$ 趋近于 $+\infty$；当 x 趋近于 $+\infty$ 时，$h(x)$ 趋近于 $+\infty$. 又 $h\left(\frac{3}{2}\right)=4e^{\frac{3}{2}}$，$\therefore k\in(4e^{\frac{3}{2}},+\infty)$.

方法二：$g'(x)=e^x(2x+1)-k$，易知 $g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore$ 要使 $y=g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恰有 2 个零点，则需满足 $g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有零点，记为 x_0，且 $g'(0)=1-k<0$，$\therefore k>1$，且 $g'(x_0)=e^{x_0}(2x_0+1)-k=0$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

$\because g(0)=k-1>0$，$g(k)=e^k(2k-1)+k(-k+1)>k(2k-1)+k(-k+1)=k^2>k-1$，

$\therefore$ 当 $y=g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恰有 2 个零点时，需满足 $g(x_0)<0$，$0<x_0<k$.

$\therefore g(x_0)=e^{x_0}(2x_0-1)+k(-x_0+1)=e^{x_0}(2x_0-1)+e^{x_0}(2x_0+1)(-x_0+1)=x_0e^{x_0}(-2x_0+3)<0$，$\therefore x_0>\frac{3}{2}$.

易知 $h(x)=e^x(2x+1)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore k=e^{x_0}(2x_0+1)>4e^{\frac{3}{2}}$.

综上所述，$k\in(4e^{\frac{3}{2}},+\infty)$.

9.【答案】AB

【解析】极差为最大值与最小值的差，$\therefore$ 极差相同，$\therefore$ 选项 A 正确；

原数据的平均数 $\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，新数据的平均数 $\overline{y}=\frac{x_1+\overline{x}+x_2+\overline{x}+\cdots+x_n+\overline{x}}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\overline{x}=2\overline{x}$，$\therefore$ 平均数不同，$\therefore$ 选项 B 正确；

原数据的方差 $s_1^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$，新数据的方差 $s_2^2=\frac{1}{n}[(x_1+\overline{x}-2\overline{x})^2+(x_2+\overline{x}-2\overline{x})^2+\cdots+(x_n+\overline{x}-2\overline{x})^2]=s_1^2$，$\therefore$ 方差相同，$\therefore$ 选项 C 错误；

中位数显然不同，$\therefore$ 选项 D 错误.

10.【答案】ACD

【解析】$\because g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)=x-\frac{1}{x}-\ln x+\frac{1}{x}-x-\ln\frac{1}{x}=0$，$\therefore$ 选项 A 正确；

$\because g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2+1-x}{x^2}>0$，$\therefore g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 又 $g(1)=0$，$\therefore g(x)>0$ 解集为 $(1,+\infty)$，$\therefore$ 选项 B 错误；

$\because \sin\frac{\pi}{3}>\sin\frac{3\pi}{11}>0$，且 $g\left(\frac{16}{3}\right)>g\left(\frac{11}{3}\right)>0$，

$\therefore \sin\frac{\pi}{3}\cdot g\left(\frac{16}{3}\right)>\sin\frac{3\pi}{11}\cdot g\left(\frac{11}{3}\right)$，$\therefore -\sin\frac{\pi}{3}\cdot g\left(\frac{16}{3}\right)<-\sin\frac{3\pi}{11}\cdot g\left(\frac{11}{3}\right)$，由 $h\left(\frac{16}{3}\right)=\sin\frac{16}{3}\pi\cdot g\left(\frac{16}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}\cdot g\left(\frac{16}{3}\right)$，$h\left(\frac{3}{11}\right)=\sin\frac{3\pi}{11}\cdot$

$g\left(\frac{3}{11}\right)=-\sin\frac{3\pi}{11}\cdot g\left(\frac{11}{3}\right)$，$\therefore h\left(\frac{16}{3}\right)<h\left(\frac{3}{11}\right)$，

$\therefore$选项 C 正确；

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\pi\cos\pi x\cdot\left(x-\frac{1}{x}-\ln x\right)+\sin\pi x\cdot\frac{x^2+1-x}{x^2}$，$\therefore x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时，$h'(x)>0$；$x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$时，$h'(x)<0$.

又 $h'(1)=0$，$\therefore 1$ 为 $h(x)$ 极大值点，$\therefore$选项 D 正确.

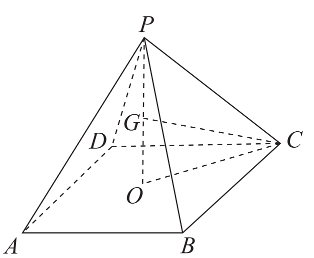
11.【答案】ACD

【解析】记正方形 $ABCD$ 和正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心分别为 O 和 O_1，则点 P 在线段 OO_1（不含端点 O）上，易知 $0<h\leqslant 1$，$\therefore$选项 A 正确；

在 $\mathrm{Rt}\triangle POC$ 中，$h=PO=\sqrt{PC^2-OC^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{2}{4}}=\frac{1}{2}$，$\therefore$选项 B 错误；

如图，记四棱锥 P-$ABCD$ 的外接球球心为 G，则点 G 则在 OP 上，连接 CG.在 $\mathrm{Rt}\triangle OGC$ 中，$OG=1-R$，$OC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$GC=R$，则 $R^2=(1-R)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$，$\therefore R=\frac{3}{4}$，$\therefore S_{球}=4\pi R^2=4\pi\times\frac{9}{16}=\frac{9}{4}\pi$，

$\therefore$选项 C 正确；



该正方体恰好放入与四棱锥 P-$ABCD$ 体积相同的 6 个四棱锥，$\therefore$公共部分的体积为正方体内切球体积的$\frac{1}{6}$，$\therefore$公共部分的体积为$\frac{1}{6}\times\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{\pi}{36}$，$\therefore$选项 D 正确.

12.【答案】6

【解析】$\because T_6=C_n^5x^{n-5}\left(\frac{2}{x}\right)^5$，$\therefore$第 6 项系数为 $C_n^5\cdot 2^5$，又 $T_7=C_n^6x^{n-6}\left(\frac{2}{x}\right)^6$，$\therefore$第 7 项系数为 $C_n^6\cdot 2^6$.

由题可知 $C_n^5\cdot 2^5=3C_n^6\cdot 2^6$，$\therefore\frac{n!}{5!\,(n-5)!}=\frac{6\cdot n!}{6!\,(n-6)!}$，$\therefore(n-5)!=(n-6)!$，$\therefore n=6$.

13.【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由抛物线定义得 $|FM|=x_1+\frac{p}{2}$，$|FN|=x_2+\frac{p}{2}$.

$\therefore\frac{||FM|-|FN||}{|MN|}=\frac{\left|\left(x_1+\frac{p}{2}\right)-\left(x_2+\frac{p}{2}\right)\right|}{\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|}$

$=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14.【答案】-3

【解析】令 $x=\sin\alpha$，$y=\cos\beta$，则$(x-\sqrt{1-y^2})\cdot(y-\sqrt{1-x^2})=0$，$\therefore x=\sqrt{1-y^2}$，或 $y=\sqrt{1-x^2}$，$\therefore x^2+y^2=1\,(x\geqslant 0)$，或 $x^2+y^2=1\,(y\geqslant 0)$.

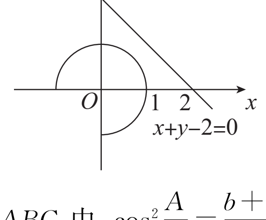
$\therefore$点$(\sin\alpha,\cos\beta)$在圆 $x^2+y^2=1$ 位于第一、二、四象限（包括坐标轴）的部分上.

$\because$点$(\sin\alpha,\cos\beta)$到直线 $x+y-2=0$ 距离为 $\frac{|\sin\alpha+\cos\beta-2|}{\sqrt{2}}=d$，

又 $\sin\alpha+\cos\beta-2\leqslant 0$，$\therefore\sin\alpha+\cos\beta-2=-\sqrt{2}d$.

下求 d 的最大值.如图，d 的最大值为点$(-1,0)$到直线 $x+y-2=0$ 的距离，$\therefore d_{\max}=\frac{|-1+0-2|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$，

$\therefore(\sin\alpha+\cos\beta-2)_{\min}=-\sqrt{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=-3$.



15. 解：(1)在$\triangle ABC$ 中，$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{b+c}{2c}$，$\therefore\frac{1}{2}(1+\cos A)=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+1\right)$，$\therefore\cos A=\frac{b}{c}$. ……… 2 分

方法一：在$\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\cos A=\frac{\sin B}{\sin C}$，$\therefore\sin B=\cos A\sin C$.

$\because A+B+C=\pi$，$\therefore \sin B=\sin(A+C)$.

$\therefore \sin A\cos C+\cos A\sin C=\cos A\sin C$，

$\therefore \sin A\cos C=0$. $\because \sin A\neq 0$，$\therefore \cos C=0$，

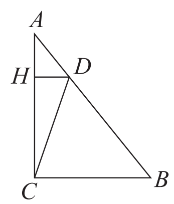
$\therefore C=\frac{\pi}{2}$. ………………………………… 6 分

方法二：$\because \cos A=\frac{b}{c}$，$\therefore \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{c}$，

$\therefore a^2+b^2=c^2$，$\therefore C=\frac{\pi}{2}$. ……………………… 6 分

(2)方法一：如图，过点 D 作 DH 垂直于 AC 于点 H. 由题可得 $\frac{AH}{HC}=\frac{AD}{DB}=\frac{1}{2}$.

设 $AH=x$，$HC=2x$，$\tan A=\frac{HD}{x}$，$\tan\angle ACD=\frac{HD}{2x}$，$\therefore \frac{\tan A}{\tan\angle ACD}=2$. ……………… 13 分



方法二：在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin A}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$①，…………………………………… 8 分

在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}=\frac{BD}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\angle ACD\right)}$，$\therefore \frac{CD}{\cos A}=\frac{BD}{\cos\angle ACD}$②，

…………………………………………… 10 分

②÷①，得 $\frac{\tan A}{\tan\angle ACD}=2$. ……………… 13 分

16. 解：(1)由题可知 X 的可能取值为 $-2,0,2$，

$\therefore P(X=-2)=(1-p)^2$，$P(X=0)=2p(1-p)$，$P(X=2)=p^2$. ………………………………… 3 分

X 的分布列如下.

X	-2	0	2
P	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

$\therefore E(X)=-2\cdot(1-p)^2+2p^2=4p-2>0$，

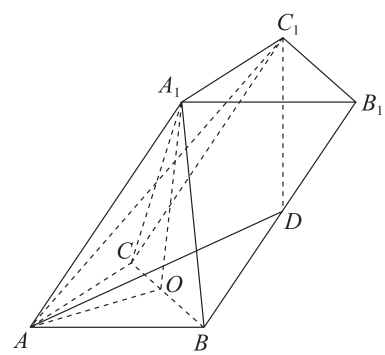
$\therefore \frac{1}{2}<p<1$.(不列分布列不扣分) ……… 7 分

(2)移动四次，样本空间的样本点总数为 $n=4^4=256$，每个样本点出现的可能性相等，且为有限个，………………………………………… 9 分

记质点经过 4 次移动后回到点 A 为事件 B，要 4 次回到起点 A，则向左向右移动次数相等，向上向下移动次数相等，$\therefore$ 事件 B 包含的样本点个数为 $m=A_4^4+\frac{A_4^4}{A_2^2\cdot A_2^2}+\frac{A_4^4}{A_2^2\cdot A_2^2}=36$，(或 $m=A_4^4+2C_4^2=36$) ………………………… 13 分

由古典概型计算公式得 $P(B)=\frac{36}{256}=\frac{9}{64}$. $\therefore$ 质点移动四次后回到点 A 的概率为 $\frac{9}{64}$. … 15 分

17. (1)证明：如图，连接 A_1B，A_1C.



$\because AB=AC$，$\angle A_1AB=\angle A_1AC$，$A_1A=A_1A$，

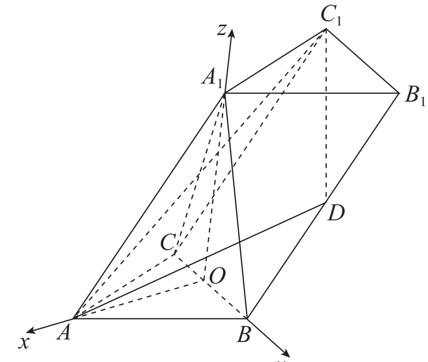
$\therefore \triangle A_1AB\cong\triangle A_1AC$，$\therefore A_1B=A_1C$.

$\because O$ 为 BC 中点，$\therefore BC\perp A_1O$. 又 $AC=AB$，$\therefore BC\perp AO$. ………………………………… 4 分

又 $AO\cap A_1O=O$，$AO\subset$ 平面 A_1AO，$A_1O\subset$ 平面 A_1AO，$\therefore BC\perp$ 平面 A_1AO. ………… 5 分

$\because BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，$\therefore$ 平面 $A_1AO\perp$ 平面 BCC_1B_1. ………………………………… 6 分

(2)解：$\because A_1O\perp$ 平面 ABC，$\therefore \angle A_1AO$ 为 A_1A 与平面 ABC 所成的角，即 $\angle A_1AO=60°$. 由题可知 OA,OB,OA_1 两两垂直，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA_1}$ 分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $AC=AB=4$，∴ $A_1(0,0,2\sqrt{6})$，$A(2\sqrt{2},0,0)$，$B(0,2\sqrt{2},0)$，$C(0,-2\sqrt{2},0)$. ∵ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$，∴ $C_1(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2},2\sqrt{6})$，$B_1(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},2\sqrt{6})$，…………………………… 10 分

∴ $D(-\sqrt{2},2\sqrt{2},\sqrt{6})$，∴ $\overrightarrow{AD}=(-3\sqrt{2},2\sqrt{2},\sqrt{6})$，$\overrightarrow{AC_1}=(-4\sqrt{2},-2\sqrt{2},2\sqrt{6})$.

设平面 AC_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

$$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}-3\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y+\sqrt{6}z=0,\\ -4\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+2\sqrt{6}z=0,\end{cases}$$ 令 $y=\sqrt{3}$，

∴ $\boldsymbol{n}=(3\sqrt{3},\sqrt{3},7)$.………………………… 13 分

∵ $A_1O\perp$ 平面 ABC，∴ 取平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，记平面 AC_1D 与平面 ABC 的夹角为 α，则 $\cos\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=$

$$\frac{7}{\sqrt{(3\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2+7^2}}=\frac{7\sqrt{79}}{79},$$

∴ 平面 AC_1D 与平面 ABC 夹角的余弦值为 $\dfrac{7\sqrt{79}}{79}$. ………………………………… 15 分

18. 解：(1) ∵ 椭圆 C 的左、右焦点分别为 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，且过 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$，

∵ $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2+3}+\sqrt{(\sqrt{2}+2)^2+3}=4\sqrt{2}$，

∴ $2a=4\sqrt{2}$，∴ $a=2\sqrt{2}$. ∴ $b^2=a^2-c^2=4$，

∴ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ………… 4 分

(2) ① 直线 l 方程为 $x=\dfrac{1}{2}y+2$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ x=\dfrac{1}{2}y+2,\end{cases}$ 消去 x，得 $9y^2+8y-16=0$，

∴ $y_1+y_2=-\dfrac{8}{9}$，$y_1y_2=-\dfrac{16}{9}$. ………… 6 分

由题得 $\dfrac{S_1+S_3}{S_2+S_3}=\dfrac{|BP|+|AF_2|}{|BF_2|+|AF_2|}=\dfrac{y_2+4+y_1}{y_1-y_2}$

$$=\frac{y_2+4+y_1}{\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}}=\frac{4-\frac{8}{9}}{\sqrt{\frac{64}{81}+\frac{64}{9}}}=\frac{7\sqrt{10}}{20}.$$

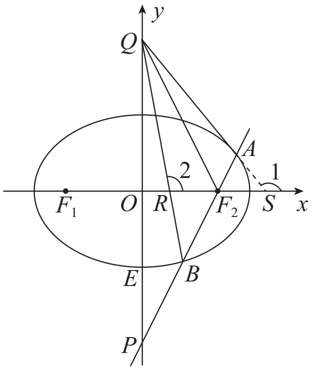
…………………………………………… 9 分

② 假设存在直线 l，设直线 l 方程为 $x=my+2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ x=my+2,\end{cases}$ 消去 x，得 $(m^2+2)y^2+4my-4=0$，$\Delta>0$ 恒成立，

∴ $y_1+y_2=\dfrac{-4m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{-4}{m^2+2}$，∴ $(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=\dfrac{32(m^2+1)}{(m^2+2)^2}$.

如图，延长 QA 交 x 轴于点 S，若 Q,R,F_2,A 四点共圆，则 $\angle AF_2S=\angle AQR$. ……… 11 分



∵ $\tan\angle AF_2S=\dfrac{1}{m}$，∴ $\tan\angle AQR=\dfrac{1}{m}$.

又 $\angle AQR=\angle 1-\angle 2$，∴ $\tan\angle AQR=\tan(\angle 1-\angle 2)=\dfrac{\tan\angle 1-\tan\angle 2}{1+\tan\angle 1\cdot\tan\angle 2}=\dfrac{k_{QA}-k_{QB}}{1+k_{QA}\cdot k_{QB}}$.（此步骤不推理不扣分）

由 $k_{QA}=\dfrac{y_1-\frac{2}{m}}{my_1+2}$，$k_{QB}=\dfrac{y_2-\frac{2}{m}}{my_2+2}$ 得 $\tan\angle AQR$

$$=\frac{4(y_1-y_2)}{(m^2+1)y_1y_2+\left(2m-\frac{2}{m}\right)(y_1+y_2)+4+\frac{4}{m^2}},$$

$$\therefore \frac{4(y_1-y_2)}{(m^2+1)y_1y_2+\left(2m-\frac{2}{m}\right)(y_1+y_2)+4+\frac{4}{m^2}}=\frac{1}{m},$$

∴ $\dfrac{1}{m}=\dfrac{16\sqrt{2m^2+2}}{16+\frac{8}{m^2}-8m^2}$，∴ $2m\sqrt{2m^2+2}=2+$

$\frac{1}{m^2}-m^2$.………………………………… 15分

由点 P 在点 E 下方得 $-\frac{2}{m}<-2$，∴ $0<m<1$，

记 $f(m)=2m\sqrt{2m^2+2}+m^2-\frac{1}{m^2}-2$，$0<m<1$，

∴ $f'(m)=2\sqrt{2m^2+2}+\frac{4m^2}{\sqrt{2m^2+2}}+2m+\frac{2}{m^3}>0$. 又 $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$，$f(1)>0$，

∴存在直线 l，条数为1条. ……………… 17分

19. 解：(1) 当 $x=4$ 时，$\left[\frac{2\cos 4}{4}\right]=\left[\frac{\cos 4}{2}\right]=-1$，

……………………………………………… 2分

当 $x=5$ 时，$\left[\frac{2\cos 5}{5}\right]=0$. ………………… 4分

(2) ①由条件 $g(x)=\frac{40}{\sqrt{x+45}+\sqrt{x+5}}$ 可知，当 $x>0$ 时，$g(x)$ 连续且单调递减 ………… 5分

∵ $x_1=5$，∴ $x_2=g(x_1)=g(5)$. ∵ $g(4)=4$，∴ $g(5)<g(4)=4$. 又 $g(5)>3.9$，∴ $3.9<g(5)<4$，即 $3.9<x_2<4$.

∵ $x_3=g(x_2)$，$3.9<x_2<4$，∴ $g(3.9)>g(x_2)>g(4)$. 又 $g(4)=4$，$g(3.9)<4.1$，∴ $4<x_3<4.1$.

∵ $x_4=g(x_3)$，$4<x_3<4.1$，∴ $g(4)>g(x_3)>g(4.1)$. 又 $g(4)=4$，$g(4.1)>3.9$，∴ $3.9<x_4<4$.

同理，可得 $4<x_5<4.1$，∴依此规律，归纳可得 $x_{2t}\in(3.9,4)$，$x_{2t+1}\in(4,4.1)$，$t\in\mathbf{N}^*$.

下面用数学归纳法证明此归纳结论：

当 $t=1$ 时，$x_2\in(3.9,4)$，$x_3\in(4,4.1)$.

假设当 $t=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$x_{2k}\in(3.9,4)$，$x_{2k+1}\in(4,4.1)$.

则当 $t=k+1$ 时，$x_{2(k+1)}=x_{2k+2}=x_{2k+1+1}=g(x_{2k+1})\in(g(4.1),g(4))\subset(3.9,4)$.

$x_{2(k+1)+1}=x_{2k+3}=g(x_{2k+2})\in(g(4),g(3.9))\subset(4,4.1)$.

综上可知，$x_{2t}\in(3.9,4)$，$x_{2t+1}\in(4,4.1)$，对 $\forall t\in\mathbf{N}^*$ 成立.（不用数学归纳法证明不扣分） …

………………………………………… 9分

∴ $\cos x_1\in(0,1)$，$\cos x_n\in(-1,0)$，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$，∴ $\left[\frac{2\cos x_1}{x_1}\right]=0$，$\left[\frac{2\cos x_n}{x_n}\right]=-1$，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

∴ $\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)]=1-n$，$n\in\mathbf{N}^*$.（或 $\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)]=\begin{cases}0, n=1,\\ 1-n, n\geqslant 2, \text{且 } n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$） ………… 10分

② 设 $\varphi(x)=x+g(x)$，$x>0$，$\varphi'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x+45}}-\frac{1}{2\sqrt{x+5}}>0$ 恒成立，∴当 $x>0$ 时，$\varphi(x)$ 单调递增. …………………… 11分

∵ $\varphi(4)=8$，由①知 $x_{2t}<4$，$x_{2t+1}>4$，$t\in\mathbf{N}^*$，且 $x_1>4$，$\varphi(x_1)=x_1+x_2>8$，

∴ $\varphi(x_{2t+1})>\varphi(4)=8$，$\varphi(x_{2t})<\varphi(4)=8$，$t\in\mathbf{N}^*$. ………………………………………… 12分

当 $n=1$ 时，$[x_1]=5$；

当 $n=2t(t\in\mathbf{N}^*)$ 时，由 $\varphi(x)=x+g(x)$ 得 $\varphi(x_n)=x_n+g(x_n)=x_n+x_{n+1}$，

∴ $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=(x_1+x_2)+(x_3+x_4)+\cdots+(x_{2t-1}+x_{2t})=\varphi(x_1)+\varphi(x_3)+\cdots+\varphi(x_{2t-1})>8t=4n$，

$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=x_1+(x_2+x_3)+(x_4+x_5)+\cdots+(x_{2t-2}+x_{2t-1})+x_{2t}=x_1+\varphi(x_2)+\varphi(x_4)+\cdots+\varphi(x_{2t-2})+x_{2t}<5+8(t-1)+4=8t+1=4n+1$，

∴ $\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]=4n$；……………………… 14分

同理，当 $n=2t+1(t\in\mathbf{N}^*)$ 时，

$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=(x_1+x_2)+(x_3+x_4)+\cdots+(x_{2t-1}+x_{2t})+x_{2t+1}=\varphi(x_1)+\varphi(x_3)+\cdots+\varphi(x_{2t-1})+x_{2t+1}>8t+4=4n$，

$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=x_1+(x_2+x_3)+(x_4+x_5)+\cdots+(x_{2t-2}+x_{2t-1})+(x_{2t}+x_{2t+1})=x_1+\varphi(x_2)+\varphi(x_4)+\cdots+\varphi(x_{2t})<5+8t=4n+1$，

∴ $\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]=4n$. ……………………… 16分

综上所述，$\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]=\begin{cases}5, n=1,\\ 4n, n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$ …

………………………………………… 17分

多维细目表

题型	题号	分值	必备知识	学科素养						预估难度		
				数学抽象	逻辑推理	数学建模	直观想象	数学运算	数据分析	易	中	难
选择题	1	5	集合的运算					√		√		
选择题	2	5	复数的运算及模的性质					√		√		
选择题	3	5	基本不等式、对数运算					√		√		
选择题	4	5	平面向量基本定理	√				√		√		
选择题	5	5	数列通项公式及最大项		√			√			√	
选择题	6	5	三角函数的图象与性质		√			√	√	√		
选择题	7	5	双曲线的定义及综合		√		√	√			√	
选择题	8	5	函数的零点		√		√	√				√
选择题	9	6	统计基础					√	√	√		
选择题	10	6	函数的基本性质		√			√			√	
选择题	11	6	立体几何中的组合体问题		√		√	√				√
填空题	12	5	二项式定理					√		√		
填空题	13	5	抛物线的定义及弦长					√		√		
填空题	14	5	直线与圆中的最值问题		√		√	√				√
解答题	15	13	三角变换与解三角形				√	√		√		
解答题	16	15	二项分布与古典概型计算		√	√		√		√		
解答题	17	15	点线面位置关系与空间角		√		√	√			√	
解答题	18	17	椭圆综合		√		√	√				√
解答题	19	17	导数与数列综合		√			√				√